GRUPO 1Ma (14-15) *CÁLCULO* *Facultad de Informática (UPM)*

15-Junio - 2015 *Tiempo: 2 horas*

1º	*2º*	*3º*	*4º*	*5º*	*suma*

Nombre y matrícula:

EXAMEN TEMA 1. Sucesiones, series, dos variables

1. *(2 ptos.)* Determinar el valor que ha de tener $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-4}\right)^{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)}$$

2. *(2 ptos.)* Calcular el límite de la sucesión con término general:

$$c_n=\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots.(2n)}}{n}$$

(Ayuda: multiplicar y dividir por n! dentro de la raíz y aplicar Stirling)

3. *(2 ptos.)* Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) *(0,2 ptos.)* Demostrar que $f(x,y)=f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$ y *(0,5 ptos.)* dibujar la curva de nivel $f(x,y)=1,\forall(x,y)\neq(0,0)$

b) *(1,3 ptos.)* Analizar la continuidad en el origen de la función.

4. *(2 ptos.)* Dar el radio de convergencia *(1 pto.)*, intervalo de convergencia de la serie de potencias,*(1 pto.)*

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^n$$

5. *(2 ptos.)* Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a)*(0,5 ptos.)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

b)*(0,8 ptos.)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

c)*(0,7 ptos.)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^{2n}}{(5n^2+1)^n}$

GRUPO 1Ma (14-15) CÁLCULO Facultad de Informática (UPM)

15-Junio - 2015 Tiempo: 2 horas

1º	2º	3º	4º	5º	suma

Nombre y matrícula:

EXAMEN TEMA 1. Sucesiones, series, dos variables

1. *(2 ptos.)* Determinar el valor que ha de tener $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-4}\right)^{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)}$$

SOLUCIÓN:

Calculemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+an}-n\right)\left(\sqrt{n^2+an}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+an}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-n^2}{\left(\sqrt{n^2+an}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\left(\sqrt{n^2+an}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{an}{n}}{\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{an}{n^2}}+\frac{n}{n}\right)}=\frac{a}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-4}\right)^{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-4}\right)\right)^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)}=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto $a=3$.

2. *(2 ptos.)* Calcular el límite de la sucesión con término general:

$$c_n=\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots.(2n)}}{n}$$

(Ayuda: multiplicar y dividir por n! dentro de la raíz y aplicar Stirling)

SOLUCIÓN:

$$\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots.(2n)}=\sqrt[n]{\frac{n!(n+1)(n+2)\ldots.(2n)}{n!}}=\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}=\sqrt[n]{\frac{e^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{e^{-n}(n)^n\sqrt{2\pi n}}}=\sqrt[n]{e^{-n}(2)^{2n}(n)^n\sqrt{2}}=$$

$$=e^{-1}(2)^2n\sqrt[n]{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-1}(2)^2n\sqrt[n]{\sqrt{2}}}{n}=\frac{4}{e}\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2n}}=\frac{4}{e}$$

15-Junio - 2015 *Tiempo: 2 horas*

1º	*2º*	*3º*	*4º*	*5º*	*suma*

Nombre y matrícula:

3. *(2 ptos.)* Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) *(0,2 ptos.)* Demostrar que $f(x,y)=f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$ y *(0,5 ptos.)* dibujar la curva de nivel
$f(x,y)=1,\forall(x,y)\neq(0,0)$

b) *(1,3 ptos.)* Analizar la continuidad en el origen de la función

SOLUCIÓN:

a) $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=\dfrac{\frac{2}{xy}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}=\dfrac{\frac{2}{xy}}{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$

$f(x,y)=1\Rightarrow x^2+y^2=2xy\Rightarrow x^2+y^2-2xy=0\Rightarrow(x-y)^2=0\Leftrightarrow x=y$

Por lo tanto se trata de la bisectriz del primer cuadrante

b) Comprobamos las condiciones de continuidad: 1. $\exists f(0,0)=0$, 2. ¿ $\exists\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$? Vamos a ver con un cambio a polares

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta}}f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=2\cos\theta\sin\theta$$

De donde deducimos que dicho límite no existe, con lo cual no es continua

Conclusión: la función no es continua en el origen.

4. *(2 ptos.)* Dar el radio de convergencia *(1 pto.)*, intervalo de convergencia de la serie de potencias,*(1 pto.)*

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^n$$

SOLUCIÓN:

Calculemos con la fórmula de la raiz su radio de convergencia, entonces

1º	*2º*	*3º*	*4º*	*5º*	*suma*

Nombre y matrícula:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n} = e^{\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{n+1}-1\right)} = \frac{1}{e}$$

Por lo que el radio de convergencia vale R=e y el intervalo de convergencia es $(-e, +e)$.

5. *(2 ptos.)* Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a)*(0,5 ptos.)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

b)*(0,8 ptos.)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

c)*(0,7 ptos.)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^{2n}}{(5n^2+1)^n}$

SOLUCIÓN:

a)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, comparándola con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ calculamos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1 < \infty$$

Y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge, lo hará también la del enunciado

b)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!}{(n)!\,(n)!\,(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

Por lo que se trata de una serie convergente.

c)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^{2n}}{(5n^2+1)^n}$ ahora aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)^2}{(5n^2+1)} = \frac{16}{5} > 1$$

Por lo que se trata de una serie divergente.

15-Junio - 2015 *Tiempo: 2 horas*

1º	*2º*	*3º*	*4º*	*5º*	*suma*

Nombre y matrícula:

EXAMEN TEMA 1. Sucesiones, series, dos variables

1. *(2 ptos.)* Calcular el límite de las sucesiones con término general:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)^{(n-1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}-1\right)n} = e^{-1}$$, por el criterio de razón y raíz.

2. *(2 ptos.)* Analizar la continuidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^6}{(y^2-x)^2+y^6} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Comprobamos las condiciones de continuidad: 1. $\exists f(0,0) = 0$, 2. ¿ $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Vamos a ver los límites reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0^6}{\left(0^2-x\right)^2+0^6}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y^6}{(y^2-0)^2+y^6}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y^6}{y^4+y^6}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right) = 0$$

Al ser iguales, sólo podemos deducir que si existe el límite, ha de valer este valor común. Calculemos dicho límite por parábolas

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=\sqrt{x}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{(x-x)^2+x^3}\right) = 1$$

Cómo éste valor es distinto del valor que habría de tener el límite, si existiera, deducimos que el límite de la función en el origen no existe.

1º	2º	3º	4º	5º	suma

Nombre y matrícula:

Conclusión: la función no es continua en el origen.

3. *(2 ptos.)* Estudiar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$$

SOLUCIÓN:

Al tratarse de una STP podemos usar el criterio del cociente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)!\right)^2}{3^{(n+1)^2}} \frac{3^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{9^n}$$

Pero $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{9^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{9^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{9^x \ln 9} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{9^x (\ln 9)^2} = 0$, aplicando dos veces consecutivas la regla de LHopital. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

Y la serie dada es convergente.

4. *(2 ptos.)* Dada la función $f(x,y) = \frac{1}{\ln\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)}$, se pide a) *(1 pto.)*calcular su dominio de definición y b) *(1 pto.)*calcular $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2}{x^2+(y-1)^2}$

SOLUCIÓN:

a) Calculemos los puntos que anulan el denominador de la función,

$$\ln\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = 1$$

Éstos son los de la circunferencia centrada en el punto $(0,1)$ y de radio uno. En estos puntos la función no está definida. Tampoco lo está en los que hacen negativo (ninguno) o cero el argumento del logaritmo, esto es en el punto $(0,1)$. La raíz no excluye puntos del dominio ya que su argumento es siempre positivo (suma de cuadrados) .

Conclusión Dom(f)= $\{(x,y) : (x,y) \neq (0,1), x^2+(y-1)^2 \neq 1\}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2}{x^2+(y-1)^2} = \frac{0}{0} = \left\{\begin{matrix} x = \rho\cos\theta \\ y = 1+\rho\sin\theta \end{matrix}\right\} = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ 0\le\theta<2\pi}} \frac{(\rho\cos\theta)^2}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2} =$

$= \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ 0\le\theta<2\pi}} (\cos\theta)^2 = (\cos\theta)^2$, d *e dónde concluimos que dicho límite no existe*

1º	*2º*	*3º*	*4º*	*5º*	*suma*

Nombre y matrícula:

5. *(2 ptos.)* Dar el radio de convergencia, intervalo de convergencia de la serie de potencias*(1 pto.)*

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} x^n$$

Sumándola, si es posible para x=1. *(1 pto.)*

SOLUCIÓN:

Calculemos con la fórmula del cociente su radio de convergencia, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n}{n(n+1)} = 1 = \frac{1}{R}$$

Por lo que el radio de convergencia vale R=1 y el intervalo de convergencia es $(-1, +1)$.

Para x=1, la serie numérica asociada es S=$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$,

Pero $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}$

Entonces S=$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}$. Calculamos, a partir de aquí las sumas parciales sucesivas

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2}, S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots, \ldots.$$

$$S_N = 1 - \frac{1}{N}$$

Con lo que la suma de la serie vale $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$